

基于小波图像压缩技术的算法研究*

张德丰¹, 马莉¹, 范灵¹, 梁忠宏²

(1. 佛山科学技术学院计算机系, 广东 佛山 528000;

2. 哈尔滨工业大学航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 小波变换通过多分辨分析过程将一幅图像分解成近似和细节部分, 细节对应的是小尺度的瞬间, 在本尺度内很稳定。因此将细节存储起来, 对近似部分在下一个尺度上进行分解, 重复该过程即可。近似与细节在正交镜像滤波器算法中分别对应于高通和低通滤波器, 这种变换通过尺度去掉相关性, 在图像压缩中被证明是有效的。由于小波变换后高频部分小波系数的绝对值较小, 而低频部分小波系数的绝对值较大, 这样, 在图像编码处理中, 可以对高频部分大多数系数分配较小的比特以达到压缩的目的。

关键词: 小波变换; 图像压缩; 高频系数; 低频系数

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 02-0042-04

小波分析是近 20 多年来发展起来的新兴学科, 作为一种快速高效、高精度的近似方法, 它是傅立叶分析的一个突破性发展, 给许多相关学科的研究领域带来了新的思想, 为工程应用提供了一种新的分析工具。小波分析是目前国际上公认的图像/信号信息获取与处理领域的高新技术, 是多学科共同关注的热点, 是图像/信号处理的前沿课题。

近年来小波分析理论受到众多学科的共同关注。在最近推出的静态图像压缩国际标准——JPEG2000 中, 小波变换 (DWT) 已经正式取代离散余弦变换 (DCT) 成为标准的变换编码方法。本文在上述研究的基础上, 提出了一种如何选择最优的小波基用于图像压缩的评价方法算法, 并以仿真实验进行了实例算法研究。

1 图像的小波分解算法

分解算法实际上就是将一幅图像通过二维小波变换分解成一系列、方向和空间局部变化的子带。一幅图像经小波分解后, 可得一系列不同分辨率的子图像。这是对图像进行各种处理的基础, 尤其是在图像压缩方面。

设 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是一个二维可分离的多分辨分析, $V_j = V_j^1 \otimes V_j^2$, 其中 $\{V_j^1\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(R)$ 上的一个多分辨分析, 其尺度函数为 ϕ , 小波函数为 ψ , 那么有相应于二维的可分离的尺度函数 $\phi(x, y)$ 和三个可分离的方向敏感小波函数, $\psi^H(x, y)$, $\psi^V(x, y)$, $\psi^D(x, y)$ 为:

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y) \quad (1)$$

$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\phi(y) \quad (2)$$

$$\psi^V(x, y) = \phi(x)\psi(y) \quad (3)$$

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y) \quad (4)$$

沿着不同的方向小波函数会有变化, ψ^H 度量沿着列变化 (例如, 水平边缘), ψ^V 度量沿着行变化 (例如, 垂直边缘), ψ^D 则对应于对角线方向。每个小波上的 H 表示水平方向, V 表示垂直方向, D 表示对角线方向。

由式(1) - (4) 给出的尺度函数和小波函数, 可以定义一个伸缩和平移的基函数:

$$\phi_{j,m,n}(x, y) = 2^{j/2} \phi(2^j x - m, 2^j y - n) = \phi_{j,m}(x) \phi_{j,n}(y) \quad (5)$$

$$\psi_{j,m,n}^H(x, y) = 2^{j/2} \psi^H(2^j x - m, 2^j y - n) = \psi_{j,m}^H(x) \phi_{j,n}(y) \quad (6)$$

$$\psi_{j,m,n}^V(x, y) = 2^{j/2} \psi^V(2^j x - m, 2^j y - n) = \phi_{j,m}(x) \psi_{j,n}^V(y) \quad (7)$$

$$\psi_{j,m,n}^D(x, y) = 2^{j/2} \psi^D(2^j x - m, 2^j y - n) = \psi_{j,m}^D(x) \psi_{j,n}^D(y) \quad (8)$$

因为 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是一个二维多分辨分析, 有:

$$V_{k+1} = V_k + W_k$$

其中

$$W_k = W_k^H + W_k^V + W_k^D$$

任意给定大小为 $M \times N$ 的图像, $f(x, y) \in L^2(R)$, $f_N(x, y)$ 是 f 在 V_N 中的投影。这时, 对 $f_k(x, y) \in V_k$, $g_k(x, y) \in W_k$, 有

* 收稿日期: 2007-07-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10171109); 佛山科学技术学院专项基金资助项目

作者简介: 张德丰 (1963 年生), 男, 副教授; E-mail: zhangdf@foshan.net

$$f_{k+1}(x, y) = f_k(x, y) + g_k(x, y)$$

其中 $g_k(x, y)$ 为

$$g_k = g_k^H + g_k^V + g_k^D$$

设 $\{a_{l,j}\}, \{b_{l,j}^I\}$ ($I=H, V, D$) 是由两个一元分解序列生成的二元分解序列:

$$a_{l,j} = a_l a_j, b_{l,j}^H = b_l a_j, b_{l,j}^V = a_l b_j, b_{l,j}^D = b_l b_j$$

因为 $f_k(x, y) \in V_k, g_k(x, y) \in W_k$, 而 $\{\phi(2^k x - m, 2^k y - n)\}, \{\Psi^I(2^k x - m, 2^k y - n)\}$ 分别是空间 V_k 与 W_k 的 Riesz 基, 故 $f_k(x, y) \in V_k, g_k(x, y) \in W_k$ 能写为:

$$\begin{cases} f_k(x, y) = \sum_{m,n} c_{k,m,n} \phi(2^k x - m, 2^k y - n) \\ g_k^I(x, y) = \sum_{m,n} d_{k,m,n}^I \Psi^I(2^k x - m, 2^k y - n) \end{cases}$$

可得到分解算法:

$$\begin{cases} c_{k,m,n} = \sum_{l,j} a_{l-2m,j-2n} c_{k+1,m,n} \\ d_{k,m,n}^I = \sum_{l,j} b_{l-2m,j-2n}^I c_{k+1,m,n} \end{cases}$$

设 $\{p_{l,j}\}, \{q_{l,j}^I\}$ ($I=H, V, D$) 是两个一元二尺度序列得到的二元二尺度序列 (即重构序列), 即

$$p_{l,j} = p_l p_j, q_{l,j}^H = q_l p_j, q_{l,j}^V = p_l q_j, q_{l,j}^D = q_l q_j$$

则重构算法为:

$$c_{k+1,m,n} = \sum_{l,j} (p_{m-2l,n-2j} c_{k,l,j} + \sum_{i=1}^3 q_{m-2l,n-2j}^i d_{k,l,j}^i)$$

图像的小波编码过程首先是对原始图像实行二维小波变换, 得到小波变换系数。由于小波变换能将原始图像的能量集中到少部分小波系数上, 且分解后的小波系数在三个方向的细节分量有高度的局部相关性, 这为进一步量化提供了有利条件。因此应用小波编码可得到较高的压缩比, 且压缩速度较快。

2 小波变换系数分析

如果采用正交小波变换, 那么从理论上讲, 小波变换前后的总能量是不变的, 是一种能量守恒的变换。并且具有一种能量集成的特性, 即将图像的能量集中在低频部分, 而在各高频子图像仅有很少比例的能量。将子图 ($M \times N$ 个像素) 的能量定义为

$$E = \frac{1}{MN} \sum_j \sum_i |x(i, j)|^2$$

如果采用双正交小波变换, 尽量采用近似于正交的双正交小波基, 使变换后能量尽量保持不变。在编码的量化阶段经常要用到图像的概率密度函数 (PDF), 小波变换后各子带概率密度函数可以通过统计方法逼近。访真实验统计结果表明, 在高频子

带, 小波变换系数更符合广义高斯分布, 即对于 m, d 子带, PDF 可由如下函数逼近:

$$p_{m,d}(x) = a_{m,d} \exp(-|b_{m,d} x|^{r_{m,d}})$$

其中, $r_{m,d}$ 是 PDF 形状控制参数。当 $r_{m,d}=2$ 时, 广义高斯分布就变成高斯分布; 当 $r_{m,d}=1$ 时, 广义高斯分布就变成了拉普拉斯分布。 $r_{m,d}$ 越小, PDF 变化越陡。对于小波变换后的系数, 除近似子图像 LL, $r_{m,d}=0.7$ 时能得到实际统计和逼近函数最接近的曲线。

3 实验结果与分析

不同于傅里叶分析, 小波基不是唯一的, 显然难点在于如何选择最优的小波基用于图像压缩, 一般情况下需要考虑以下几个因素:

- (1) 小波基的正则性和消失矩。
- (2) 小波基的线性相位。
- (3) 所处理图像与小波基的相似性。
- (4) 小波函数的能量集中性。
- (5) 综合考虑压缩效率和计算复杂度。

正则性是函数光滑性的一种描述, 也反映了函数频域能量集中的程度。正则性对图像压缩效果有一定的影响, 如果图像大部分是光滑的, 一般选择正则性好的小波。如 Haar 小波是不连续的 (即不光滑的), 会造成复原图像中出现方块效应, 而采用其他的小波基则方块效应会消失。

现选择 bior3.7 正交小波对图像进行分解。图 1a 是原始图像; 图 1b 是分解后的低频和高频图像; 图 1c 第一次压缩后图像; 图 1d 是第二次压缩后图像。图 1a 图像大小为: 524 288 Bytes; 第一次压缩后图像 (图 1c) 的大小为: 145 800 bytes; 第二次压缩后图像 (图 1d) 的大小为: 45 000 bytes。

第一次压缩我们提取原始图像中小波分解第一层的低频信息, 此时压缩效果较好, 压缩比较小, 约为 1/3.6 大小; 第二次压缩是提取第一层分解低频部分的低频部分, 即第二低频部分, 其压缩比较大, 约为 1/12, 压缩效果在视觉上也基本过得去。随着分解层数的增加, 压缩比是递减的。

保留原始图像中低频信息的压缩方法只是一种最简单的压缩方法。它不需要经过其他处理即可获得较好的压缩效果。当然, 对于上面的实例我们还可以提取小波分解的更高层的低频信息。从理论上说, 可以获得任意压缩比的压缩图像。只不过在对压缩比和图像质量都有较高要求时, 它就不如其他压缩方法了。

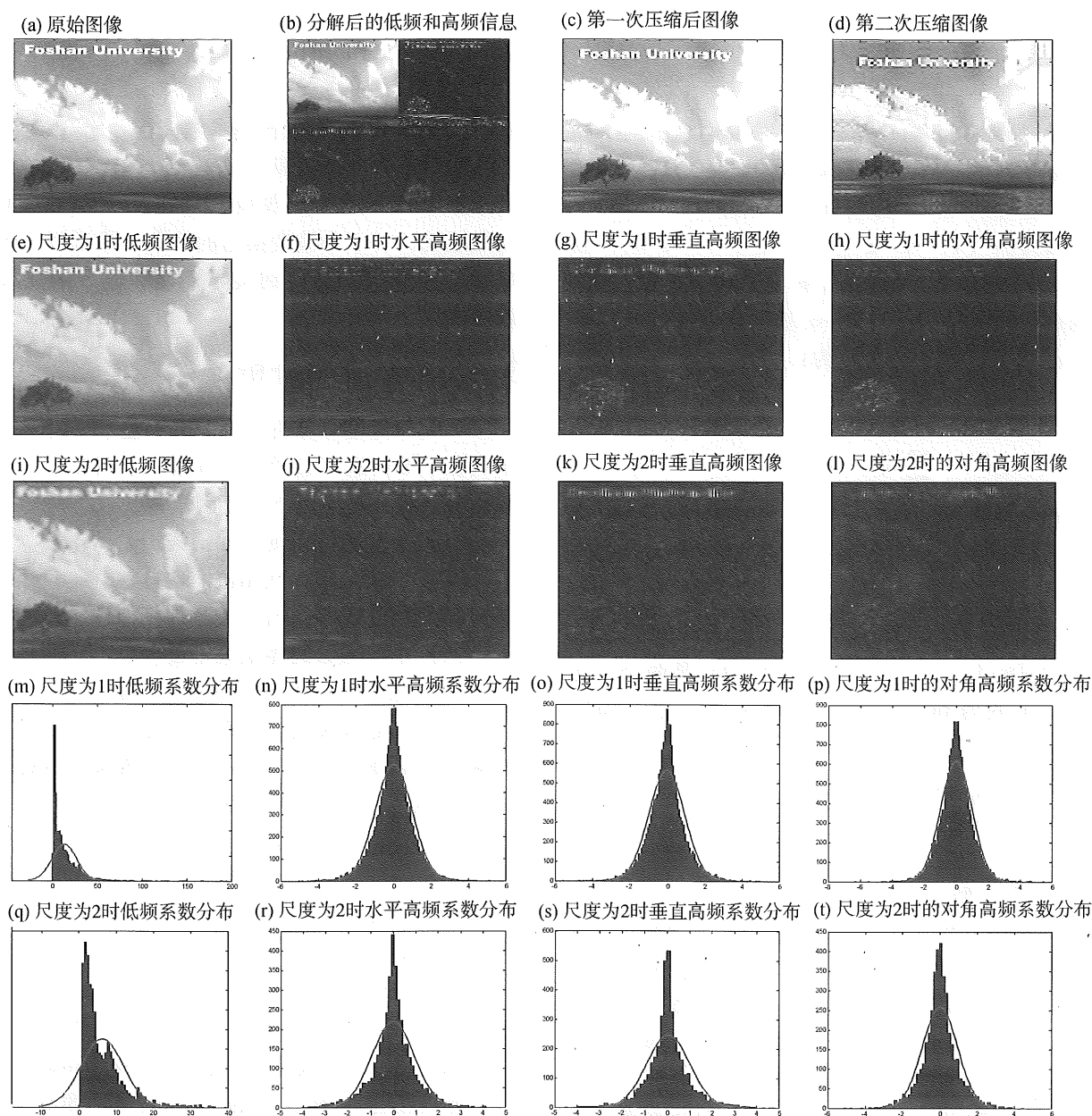


图 1 小波图像编码分析示意图

Fig. 1 The sketch map of wavelet image codes analysis

图 1e - 图 1t 是采用 sym8 正交小波对原图像进行两次分解后得到的低频和高频图像。图 1m - 图 1t 是图 1e - 图 1t 所对应的小波系数的分布直方图。根据中心极限定律, 在大样本的情况下, 小波系数相对于局部的方差应该服从正态分布, 小波系数的均值为零。图 1m - 图 1t 是仿真程序的运行结果, 显示了小波系数的直方图以及相应的近似正态分布曲线, 是为了验证小波系数的能量分布情况。从图中可以看出, 在尺度为 1 的情况下, 低通小波系数不服从正态分布而高通小波系数很好地拟合正态分布; 在尺度为 2 的情况下, 低通小波系数和高通小波系数都不服从正态分布。原因是第二层小波系数

数目少, 没有能够很好地拟合大数定理。

4 结 论

(1) 一般情况下, 正则性阶数越高对图像压缩效果越好, 但在某些情况下也存在相反的情况, 即正则性阶数小的小波基反而对图像的压缩效果好。这主要是所采用的小波函数与待压缩图像结构上存在一定的相似性。例如, 由电视图像信号发生器产生的棋盘信号和方格信号, 在相同数码下, 用 Haar 小波基压缩的效果就好于用 Daubechies 小波 ($N > 2$) 得到的效果, 其原因是 Haar 小波函数的基本图像与原图像的结构有一定的相似性。

(2) 对图像做小波分解后, 可得到一系列不同的分辨率的子图像。而对于图像来说, 表征它最主要部分是低频部分, 而高频大部分点的数值均接近于0, 而且频率越高, 这种现象越明显。因此, 利用小波分解去掉图像的高频部分而仅保留图像的低频部分是一种最简单的图像压缩方法。

参考文献:

- [1] CAI T, BROWN L. Wavelet shrinkage for nonequispaced samples[J]. *Annals of Statistics*, 2005, 26(5):1783 - 1799.
- [2] MALLAT S. Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models[J]. *IEEE Trans ASSP*, 1998, 37(12):2091 - 2110.
- [3] MALLAT S, ZHONG S. Characterization of signals from multiscale edges[J]. *IEEE Trans PAMI*, 2003, 14(7): 710 - 732.
- [4] DONOHO David L, JOHNSTONE I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. *Biometric*, 1998, 81:425 - 455.
- [5] COHEN A. Biorthogonal wavelets[M] // C. K. Chui ed. *Wavelets: A tutorial in theory and application*, Academic Press Ltd., 1999:123 - 152.
- [6] SARDY S. Wavelet shrinkage for unequally spaced data[J]. *Statistics and Computing*, 1999, 9(1): 65 - 75.
- [7] ZHANG Lei, BAO Paul, WU Xiaolin. Hybrid inter - and intra - wavelet scale image restoration[J]. *Pattern Recognition Letter*, 2003, 36(8):1737 - 1746.
- [8] COHEN A. Biorthogonal wavelets and dual filter[M] // M. Barland ed. *Wavelets in Image Communication*. Elsevier, 1994:1 - 26.
- [9] DONOHO D L. Denoising by soft - thresholding[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 1(2): 115 - 122.
- [10] MALLAT S, HWANG W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. *IEEE Trans IT*, 2002, 38(2):617 - 643.

Algorithm Research on Image Compression Technologies with Wavelet Transform

ZHANG DE-feng¹, MA Li¹, FAN Ling¹, LIANG Zhong-hong²

(1. Department of Computer Science, Foshan University, Foshan 528000, China;

2. Institute of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: With the process of multiresolution analysis, wavelet transform separates an image into approximate and detail parts. The detail part corresponds with the small scaling transience which is stable in the small scale, and then wavelet transform analyzes the approximate part in the next scale. In the algorithm of quadrature mirror filters, the approximant part corresponds with high-pass filter and the other part corresponds with low-pass filter. This transform subtracts correlation through scale and it is efficient in image compression. After wavelet transform, the absolute value of wavelet coefficients in the part of high frequency is less, and that in the part of low frequency is more. In that case, the image can be compressed with less bits for in the most coefficients in the part of high frequency.

Key words: wavelet transform; Image compression; coefficient of high frequency; coefficient of low frequency